المحاضرة الثالثة

ملاحظة:

إن مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية.

* أعداد فيرما

ظن أن كل عدد من هذه الأعداد عدد أولي

$F_n = 2^{2^n} + 1$

$F_0 = 3$

$F_1 = 5$

$F_2 = 17$

⋮

$F_5 = (2)^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$ عدد مؤلف

أثبت أولر أن F_5 عدد مؤلف حيث $641 \mid F_5$

* ظن أحدهم أن العبارة $x^2 - x + 41$ أعداد أولية

$x = 0$ واو ....

لكن تم إثبات هذا الكلام غير دقيق حيث الأعداد أولية فقط حتى $x = 40$

أي أن الأعداد من $x = 41$ غير أولية

العدد $= (41)^2 - 41 + 41 = 41 \times 41$ ← عدد مؤلف

أعداد إقليدس

$N_k = \underbrace{P_1 . P_2 \cdots P_k}_{\text{أعداد أولية}} + 1$

$N_1 = 2 + 1 = 3$

$N_2 = 2.3 + 1 = 7$

$N_3 = 2.3.5 + 1 = 31$

ظن إقليدس أن جميع هذه الأعداد أعداد أولية لكن فيما بعد تم إثبات أن $N_6 = 2.3.5.7.11.13 + 1$ عدد مؤلف

التحليل بطريقة فرما للعوامل:

لقد رأينا سابقاً أن كل عدد صحيح $n>1$ له عامل أولي ومن ثم يمكن تحليله إلى عوامل أولية. سنرى أن تحليل الأعداد الفردية له الأهمية الكبرى وسنشرح كيفية التحليل بالطريقة الآتية:

مبرهنة-1-

إذا كان n عدداً صحيحاً فردياً موجباً $(1<n)$ فيمكن دائماً كتابته كحاصل ضرب عددين صحيحين موجبين $n=a.b$ إذا وفقط إذا أمكن كتابته كفرق بين مربعين

$$\text{أي} \quad n=a.b \Leftrightarrow n=x^2-y^2$$

البرهان:

$\Leftarrow$) نفرض أولاً أن $n=a.b$ حيث a,b أعداد صحيحة موجبة فردية فعندئذ نجد

$$\underbrace{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}_{x} - \underbrace{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}_{y} = a.b = n$$

$$\Rightarrow x^2-y^2=n$$

أي عندئذ n هو فرق بين مربعين.

$\Rightarrow$) نفرض أن n هو فرق بين مربعين أي إذا كان $n=x^2-y^2$ ($1<n$) فعندئذ $x>y$ ومنه $x-y>0$ وبالتالي حتماً $x+y>0$

من جهة ثانية

$$n=x^2-y^2=\underbrace{(x-y)}_{a}\underbrace{(x+y)}_{b}=a.b$$

وبالتالي n هو جداء عددين موجبين وفرديين كما فرضنا.

ملاحظة :

تعتمد طريقة فيرما في تحليل العدد n إلى عاملين على البحث عن عددين صحيحين x و y يحققان العلاقة

$$n = x^2 - y^2$$

أي $$y^2 = x^2 - n$$

إذا بدأنا بالبحث عن أصغر عدد صحيح k يحقق العلاقة $k^2 - n \geq 0$ فهذا يعني أن $k^2 \geq n$ ثم نبحث بين الأعداد :

$k^2 - n$ ، $(k+1)^2 - n$ ، $(k+2)^2 - n$ وهكذا

حتى نصل إلى قيمة m أكبر من $\sqrt{n}$ تحقق الشرط $m \geq \sqrt{n}$

ونجعل المقدار $m^2 - n$ يساوي مربع كامل.

إن خطوات الحل السابقة تبدو منطقية.

مثال :

حلل العدد 315 بطريقة فيرما

315 عدد غير مربع

$$(17)^2 < 315 < (18)^2$$

$k = 18$

$$(18)^2 - 315 = 9 = (3)^2$$

$$\Rightarrow 315 = (18)^2 - (3)^2 = (18-3)(18+3)$$

$$= 15 \cdot 21$$

$$315 = 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

315	3
105	3
35	5
7	7
1	

مثال :

حلل العدد $n = 119143$ بطريقة فيرما

$$(345)^2 < 119143 < (346)^2$$

$k = 346$

$$(346)^2 - 119143 = 573$$ ليس مربع كامل

نحسب بالتوالي

$(347)^2 - 119143 = 1266$

- - - - - -

$(352)^2 - 119143 = 4761 = (69)^2$

$(352)^2 - (69)^2 = 119143$

$(352+69)(352-69) = 119143$

$421 \cdot 283 = 119143$

421: عدد أولي — 283: عدد أولي

لنتحقق أن 283 عدد أولي

$2, 3, 5, 7, 11, 13$

لا يقبل القسمة على الأعداد الأولية 283 وبالتالي 283 عدد أولي.

تمرين: حلل العدد $n = 23449$ إلى جداء عوامل أولية

المعادلات الديوفانتية

• المعادلة الديوفانتية الخطية بمجهولين:

هي أي معادلة من الشكل $ax+by=n$

a, b, n أعداد صحيحة

حل المعادلة من هذا النوع هو قيم صحيحة لـ x و y تحقق هذه المعادلة.

مثلاً:

$$4x+2y=7$$

الطرف الأيسر زوجي والطرف الأيمن فردي واضح أن المعادلة مستحيلة الحل أي لا يوجد x و y تحقق المعادلة.

مثلاً:

$$3x+6y=18$$

$$3(4)+6(1)=18$$

فالثنائية $(4,1)$ تحقق المعادلة.

$$3(0)+6(3)=18$$

الثنائية $(0,3)$ تحقق المعادلة

$$3(2)+6(2)=18$$

الثنائية $(2,1)$ تحقق المعادلة

نرى أن المعادلة قد تكون مستحيلة وقد تملك عدداً لانهائياً من الحلول والمبرهنة الآتية تبين الشرط اللازم والكافي لكي تكون المعادلة ديوفانتس الخطية قابلة للحل وتعطينا العلاقة التي تعطي كل الحلول بعد معرفة أحدها

مبرهنة:

لتكن لدينا المعادلة $ax+by=c$ حيث $a,b,c\in\mathbb{Z}$ غير معدومين معاً عندئذ تكون لهذه المعادلة حل إذا وفقط إذا كان القاسم المشترك الأعظم لـ a و b يقسم c أي

$$d=d(a,b) \mid c.$$

وإذا كان (x_0,y_0) حلاً للمعادلة فإن جميع الحلول تعطى بالعلاقات الآتية:

$$\begin{cases} x = x_0 + \frac{b}{d} \cdot t \\ y = y_0 - \frac{a}{d} \cdot t \end{cases} \quad ; t \in \mathbb{Z}$$

مثال: سؤال مهم

عين جميع حلول المعادلة الآتية

$$172x + 20y = 1000$$

نكتب المعاملات 172, 20 حسب خوارزمية الإقليدس

١- نحسب القاسم المشترك الأكبر بالتركيب الخطي

٢- حل المعادلة الآتية

$$\left.\begin{aligned} 172 &= (8)\boxed{20} + 12 \\ 20 &= 1\boxed{12} + 8 \\ 12 &= 1\cdot\boxed{8} + \boxed{4} \\ 8 &= 2\cdot 4 + 0 \end{aligned}\right\} \quad d(172, 20) = 4$$

$$4 = 12 - 1\cdot 8 = 12 - 1(20 - 12) = 2(12) - 1(20)$$

$$= -(20) + 2[172 - (8)20] = (-17)\,20 + (2)\,172$$

$4 \mid 1000 \Rightarrow$ توجد للمعادلة حل

$$\boxed{4 = (172)(2) + (20)(-17)}$$

نضرب هذه المساواة في حاصل قسمة 1000 على 4 أي $\frac{1000}{4} = 250$

$$1000 = (172)\underbrace{(500)}_{x_0} + (20)(\underbrace{-4250}_{y_0})$$

وبالتالي $(x_0, y_0) = (500, -4250)$ حل خاص للمعادلة المعطاة

$$x = x_0 + \frac{b}{d} t$$
$$y = y_0 + \frac{a}{d} t \quad ; t \in \mathbb{Z}$$

$$x = 500 + \frac{20}{4} \cdot t$$

و $\quad , t \in \mathbb{Z}$

$$y = -4250 - \frac{172}{4} t$$

الصيغة العامة للحل
$$\begin{cases} x = 500 + 5t \\ y = -4250 - 43t \end{cases} \quad , t \in \mathbb{Z}$$

ملاحظة:

تتطلب أحيانا تعيين الحلول الموجبة إن كانت موجودة في مسائل الحياة.

أي $x > 0$ أي $500 + 5t > 0$

$y > 0$ أي $-4250 - 43t > 0$

البحث عن قيمة $t \in \mathbb{Z}$ حيث تحقق المتراجحتين أعلاه.

$$\begin{cases} 5t > -500 \\ -43t > 4250 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t > -100 \\ t < \frac{4250}{-43} = -98,83 \end{cases}$$

أي $-100 < t < -98,83$

ولأن $t \in \mathbb{Z}$ فإن قيمة t التي تحقق المتراجحتين هي $\boxed{t = -99}$ وعندئذ يكون الحل الموافق

$$x = 500 + 5(-99) = 5$$

$$y = -4250 - 43(-99) = 7$$

تمرين

عين إن أمكن وجود حلول المعادلة

$$6x + 5y = 22$$

$$7x + 9y = 5$$

بيّن إمكانية الحلول الصحيحة.

$$16x + 12y = 66$$

• ثلاثيات فيثاغورث :

تعريف :

نقول عن الأعداد الصحيحة x و y و z أنها تؤلف ثلاثي فيثاغورث أولي إذا كان (x,y,z)

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \wedge \quad d(x,y,z) = 1$$

مثال :

(3,4,5) ثلاثي فيثاغورث أولي

(6,8,10) ثلاثي فيثاغورث ولكن غير أولي .

(5,12,13) " " أولي

بعض المبرهنات والنتائج :

مبرهنة :

إذا كان الثلاثي (x,y,z) ثلاثي فيثاغورث أولي فإن الأعداد الثلاثة أولية نسبياً مثنى مثنى

الإثبات :

(p|d)

نفرض أن $1 < d = d(x,y)$ وبالتالي فإن d له عدد أولي مثل p يقسمه أي

$$p|x \quad \wedge p|y$$

ومنه :

$$p|x^2 \quad \wedge \; p|y^2$$

وبالتالي يقسم التركيب الخطي لـ x^2 و y^2

$$p|(x^2+y^2) = z^2 = z.z \Rightarrow p|z$$

p يقسم x و y و z وهو عدد أولي هذا يتطلب الثلاثي ليس أولياً وبالتالي يناقض الفرض إذاً $d(x,y) = 1$

أي العددان أوليان نسبياً فيما بينهما .

طريقة مشابهة $d(y,z) = 1$

و $d(z,x) = 1$

موزاييك

$$x = 500 + \frac{20}{4} \cdot t$$

و ,$t \in \mathbb{Z}$

$$y = -4250 - \frac{172}{4} t$$

الصيغة العامة للحل: $\begin{cases} x = 500 + 5t \\ y = -4250 - 43t \end{cases}$,$t \in \mathbb{Z}$

ملاحظة:

تتطلب أحياناً تعيين الحلول الموجبة إن كانت موجودة في مسائل التطبيق.

أي $x > 0$ أي $500 + 5t > 0$

$y > 0$ أي $-4250 - 43t > 0$

نبحث عن قيمة $t \in \mathbb{Z}$ حيث تتحقق المتراجحتان أعلاه.

$5t > -500$ و $t > -100$

$-43t > 4250$ و $t < \frac{4250}{-43} = -98{,}83$

أي $-100 < t < -98{,}83$

ولأن $t \in \mathbb{Z}$ فإن قيمة t الوحيدة المحققة للمتراجحتين $\boxed{t = -99}$ وعندئذ يكون الحل الموافق

$x = 500 + 5(-99) = 5$

$y = -4250 - 43(-99) = 7$

تمرين

بيّن أن لا يوجد حل للمعادلة $6x + 51y = 22$

$7x + 9y = 5$

بيّن إمكانية الحلول الموجبة.

$18x + 12y = 66$

ممتنع يكون

$z^2 = x^2+y^2 = 8(M_1+M_2)+2 = 8M+2$, $M = M_1+M_2 \in \mathbb{Z}$

وبالتالي z لايمكن ان يكون فردياً (لوكان فردياً لوجب ان يكون شكله $(z^2 = 8M+1$

لوكان z زوجياً لوجب أن يكون شكله من النوع:

$z = 2n$

$z^2 = 4n^2$

لايمكن أن يكون من الشكل $8M+2$ في الحالتين

لايمكن $z^2 = 8M+2$

إذاً y و x ليسا فرديين معاً ولاحظنا انهما ليسا زوجيين معاً وبالتالي أحدهما زوجي والآخر فردي

مبرهنة -٤-

اذاكان حاصل ضرب عددين $d(a,b)=1 \wedge a.b = c^n$ أوليين فيما بينهما عدد مرفوع للأس n عندئذ يوجد عددان صحيحان a_1, b_1 حيث أن

$d(a,b)=1 \wedge a.b = c^n \Rightarrow a = (a_1)^n \; ; \; b = (b_1)^n$

مبرهنة:

إن جميع الحلول الصحيحة الغير الصفرية لمعادلة فيثاغورث $x^2+y^2=z^2$ حيث y زوجي ، x فردي و $d(x,y,z)=1$

تعطى بالعلاقات الآتية:

$x = r^2 - s^2$ ، $y = 2r.s$, $z = r^2+s^2$, $d(r,s)=1$

حيث r,s أعداد صحيحة غير صفرية أوليان فيما بينهما أحدهما فردي والآخر زوجي

المثال الآتي يوضح ذلك:

أوجد جميع ثلاثيات فيثاغورث كما أن $x = 15$

$15 = r^2 - s^2 = (r-s)(r+s)$

$r - s = 1 \wedge r + s = 15 \leftarrow 15 = 15 \cdot 1$

$r = 8 \quad s = 7$

$r - s = 3 \wedge r + s = 5 \leftarrow 15 = 5 \cdot 3$

$r = 4 \quad s = 1$

$x = r^2 - s^2$

عندما $r = 8 \quad s = 7$

أثبت أنه إذا كانت (x, y, z) ثلاثية فيثاغورث أولية فإن أحد الأعداد x و y أو z يقبل القسمة على 3

أثبت أن نصف قطر الدائرة المرسومة داخل أضلاع مثلث فيثاغورث هو دائماً عدد صحيح

(نصف قطر - مساحة المثلث)

صحيح

$S = \frac{1}{2} x y$

نصف قطر الدائرة

$S = \frac{1}{2} R (x + y + z)$

$R = \frac{xy}{x + y + z}$